جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الدورة الإضافية للعام الدراسي 2017/2016

اسم الطالب :
العلامة : 100
المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول : (25 علامة)

لتكن S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر من S فاثبت أن :

1) الشرط اللازم والكافي كي تكون B غير خالية هو أن تكون S مونوئيد .
2) تكون B زمرة جزئية من S إذا كانت غير خالية .

السؤال الثاني : (15 علامة)

لتكن A مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A ، اثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in \mathcal{F}(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ هو أن يكون $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$.

السؤال الثالث : (20 علامة)

1) اثبت أن نصف الزمرة الدوارة (a) ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $r = 1$
2) اثبت أنه من أجل عنصر a من نصف زمرة دورية S توجد قوة للعنصر a مثل a^n بحيث يكون a^n عنصراً جامداً .

السؤال الرابع : (15 علامة)

اثبت أنه في أي زمرة طبولوجية G توجد جملة أساسية $\{u\}$ من المجاورات للعنصر الحيادي e تحقق :

1) كل u تكون تناظرية ومغلقة .
2) من أجل أي u من $\{u\}$ يوجد عنصر v من $\{u\}$ بحيث يكون $v^2 \subseteq u$.
3) من أجل أي u من $\{u\}$ و $a \in G$ يوجد عنصر v من $\{u\}$ بحيث يكون $ava^{-1} \subseteq u$ و $v \subseteq a^{-1}ua$

السؤال الخامس : (25 علامة)

أ) ليكن a عنصراً ثابتاً في الزمرة النصف طبولوجية G ن فاثبت أن التطبيق $\rho_a : G \to G$ حيث $\rho_a(x) = xa$ ، $\forall x \in G$ يكون هوميومورفيزماً .
ب) لتكن $G = \mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر وهي زمرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ولنزودها بالطبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي: (المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^*$ الحاوية على العدد 1 إضافة للمجموعة الخالية)
- هل التطبيق g_1 مستمر في النقطة $(2,3)$ ولماذا ؟
- هل التطبيق g_2 مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟

حمص في 23 / 8 / 2017

د. عصام نسيم

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول: 25

أ) المجموعة
$$B = \{ b \in S ; bS = Sb = S \}$$

1) لزوم الشرط: $B \neq \phi$ فيوجد عنصر $b \in S$ ينتمي الى B وبالتالي

$\forall a \in S$ يوجد $x, y \in S$ بحيث يكون $bx = a$, $yb = a$ (5)

لكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e \in S$ و $\acute{e} \in S$ بحيث يكون $\acute{e} b = b$, $be = b$

ومنه نجد:

$a e = y b e = y b = a \Rightarrow$ e حيادي يميني

$\acute{e} a = \acute{e} b x = b x = a \Rightarrow$ $\acute{e}$ حيادي يساري $\} \Rightarrow e = \acute{e} \Rightarrow$

e حيادي في S وبالتالي S مونوئيد. (5)

كفاية الشرط: إذا كانت S مونوئيد فحياديها e ينتمي الى B لأن

$eS = Se = S$ وبالتالي $B \neq \phi$ (5)

2) إذا كانت $B \neq \phi$ فليكن $b_1, b_2 \in B$ فإن:

$b_1 b_2 S = b_1 (b_2 S) = b_1 S = S$

$S b_1 b_2 = (S b_1) b_2 = S b_2 = S$ $\} \Rightarrow b_1 b_2 \in B \Rightarrow$ B نصف زمرة جزئية من S

$B \neq \phi$ حسب (1) يوجد عنصر حيادي e في S ولكن $eS = Se = S$ ومنه

ينتج أن $e \in B$. (5)

بما أن $e \in S$ فمهما يكن $b \in B$ فإنه يوجد $b', b'' \in S$ بحيث يكون:

$e = b b'$ $\qquad e = b'' b$

$b' = e b' = b'' b b' = b'' e = b''$

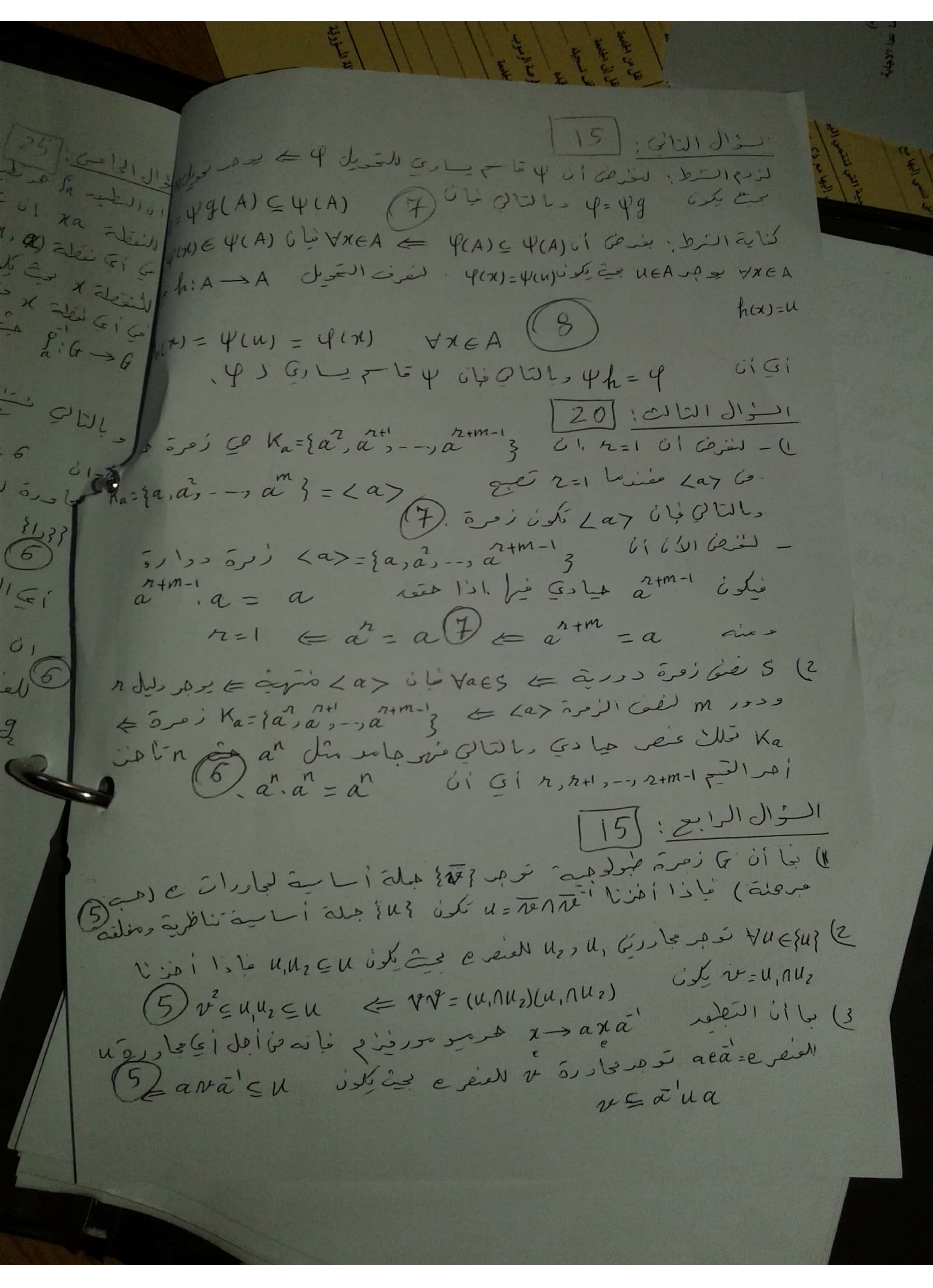
أي أنه مهما يكن $b \in B$ فإنه يوجد $b' \in S$ بحيث يكون $b b' = b' b = e$

وأن

$S = eS = b' b S = b' S$

$S = Se = S b b' = S b'$ $\} \Rightarrow b' \in S$ (5)

وبالتالي لكل عنصر $b \in B$ نظير في B أي أن B زمرة جزئية من S



السؤال الثاني: 15

لزوم الشرط: لنفرض أن ψ قاسم يساري للتحويل φ ⇐ يوجد تحويل g بحيث يكون $\varphi = \psi g$ وبالتالي فإن $\varphi(A) = \psi g(A) \subseteq \psi(A)$ (7)

كفاية الشرط: بفرض أن $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$ ⇐ $\forall x \in A$ فإن $\varphi(x) \in \psi(A)$ ، $\forall x \in A$ يوجد $u \in A$ بحيث يكون $\varphi(x) = \psi(u)$. لنعرف التحويل $h : A \to A$ ، $h(x) = u$

$\psi h(x) = \psi(u) = \varphi(x) \quad \forall x \in A$ (8)

أي أن $\psi h = \varphi$ وبالتالي فإن ψ قاسم يساري لـ φ .

السؤال الثالث: 20

1) - لنفرض أن $r = 1$ أي أن $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$ هي زمرة في $\langle a \rangle$ عندما $r = 1$ تصبح $K_a = \{a, a^2, \dots, a^m\} = \langle a \rangle$

وبالتالي فإن $\langle a \rangle$ تكون زمرة. (7)

- لنفرض الآن أن $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{r+m-1}\}$ زمرة دوارة

فيكون a^{r+m-1} حيادي فيها . إذا تحقق $a^{r+m-1} \cdot a = a$

ومنه $a^{r+m} = a$ ⇐ (7) $a^r = a$ ⇐ $r = 1$

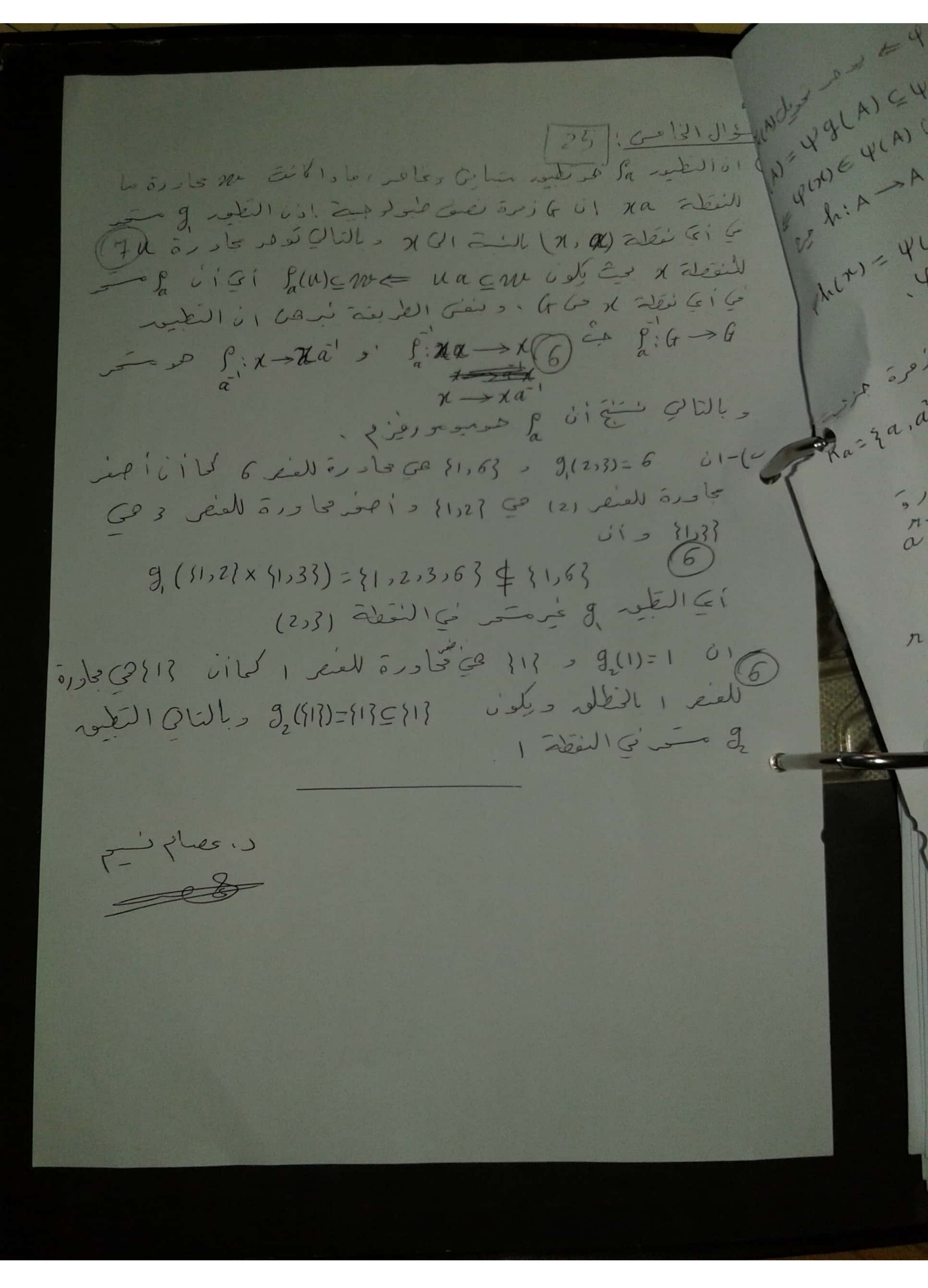
2) S نصف زمرة دورية ⇐ $\forall a \in S$ فإن $\langle a \rangle$ منتهية ⇐ يوجد دليل r ودور m لنصف الزمرة $\langle a \rangle$ ⇐ $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$ زمرة ⇐ K_a تملك عنصر حيادي وبالتالي فهو جامد مثل a^n حيث n تأخذ أحد القيم $r, r+1, \dots, r+m-1$ أي أن $a^n \cdot a^n = a^n$. (6)

السؤال الرابع: 15

1) بما أن G زمرة طبولوجية توجد $\{V\}$ جملة أساسية لجوارات e (حيث مرجعة) فإذا أخذنا $u = V \cap V^{-1}$ تكون $\{u\}$ جملة أساسية تناظرية ومغلقة (5)

2) $\forall u \in \{u\}$ توجد مجاورتان u_1 , u_2 للعنصر e بحيث يكون $u_1 u_2 \subseteq u$ فإذا أخذنا $v = u_1 \cap u_2$ يكون $vv = (u_1 \cap u_2)(u_1 \cap u_2)$ ⇐ $v^2 \subseteq u_1 u_2 \subseteq u$ (5)

3) بما أن التطبيق $x \to a x a^{-1}$ هوميومورفيزم فإنه من أجل أي مجاورة u للعنصر $a e a^{-1} = e$ توجد مجاورة v للعنصر e بحيث يكون $a v a^{-1} \subseteq u$ ⇐ $v \subseteq a^{-1} u a$ (5)



السؤال الخامس: (٢٦)

ا) ان التطبيق ρ_a هو تطبيق متباين وغامر، وبما ان W مجاورة ما للنقطة xa ان G زمرة تضعيف طوبولوجية اذن التطبيق g_1 مستمر في أي نقطة (x, a) بالنسبة الى x وبالتالي توجد مجاورة U للنقطة x بحيث يكون $Ua \subseteq W \Rightarrow \rho_a(U) \subseteq W$ أي أن ρ_a مستمر في أي نقطة x من G، وبنفس الطريقة نبرهن ان التطبيق $\rho_a^{-1} : G \to G$ حيث $\rho_a^{-1} : xa \to x$ و $\rho_{a^{-1}} : x \to xa^{-1}$ هو مستمر

$x \to xa^{-1}$

وبالتالي نستنتج أن ρ_a هوميومورفيزم.

ب-1- ان $g_1(2,3)=6$ و $\{1,6\}$ هي مجاورة للعنصر 6 كما ان أصغر مجاورة للعنصر (2) هي $\{1,2\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 3 هي $\{1,3\}$ وان

$$g_1(\{1,2\}\times\{1,3\}) = \{1,2,3,6\} \nsubseteq \{1,6\}$$

أي التطبيق g_1 غير مستمر في النقطة $(2,3)$

2- ان $g_2(1)=1$ و $\{1\}$ هي مجاورة للعنصر 1 كما ان $\{1\}$ هي مجاورة للعنصر 1 المنطلق ويكون $g_2(\{1\})=\{1\}\subseteq\{1\}$ وبالتالي التطبيق g_2 مستمر في النقطة 1

د. عصام نسيم